

補足 1（配付資料 p. 82 の微分方程式を解く過程について）：

微分方程式

変数 x とその関数 $y = y(x)$ および導関数 $y' \left(= \frac{dy}{dx} \right)$ を含む方程式を微分方程式という。

微分方程式を満たす x の関数 y をその方程式の解といい、解 $y(x)$ を求めることを「微分方程式を解く」という。

参考文献（[] 内は、熊本県立大学附属図書館所蔵情報）

・『基礎 微分積分』（市東和夫・中田広光・八幡誠，産業図書，1999 年 4 月，¥2,400+税，ISBN：4-7828-9032-X）[開架 2，413.3||Sh 92，0000231511] →（犬塚裕樹先生担当の数学 I（1 年生前期配当）と数学 II（1 年生後期配当の教科書））

配布資料 82 ページの（1）式から

$$C_0 \cdot Q \cdot dt + M \cdot dt - C \cdot Q \cdot dt = V \cdot dC \quad (1) \text{（再掲，教科書 p. 134 の（2.1）式）}$$

を変形すれば，次式となる。

$$\frac{V}{Q} \cdot \frac{dC}{dt} = C_0 - C + \frac{M}{Q} \quad (a) \text{（教科書 p. 134 の（2.2）式）}$$

この式を変形して

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{Q}{V} \cdot C + \frac{Q}{V} \cdot \left(C_0 + \frac{M}{Q} \right) \quad (b)$$

ここで，微分方程式の教科書などより

$$\frac{dC}{dt} = a \cdot C + b \quad (a, b \text{ は定数}) \quad (c)$$

の時，この微分方程式を解くと，

$$C = C_1 \cdot e^{at} + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は定数}) \quad (d)$$

であるので，（b）式を解くと，次式のようになる。

$$C = C_1 \cdot e^{\frac{Q}{V}t} + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は定数}) \quad (e)$$

初期条件は， $t=0$ の時， $C = C_S$ であったので，（e）式から

$$C_S = C_1 \cdot e^0 + C_2 \quad (f)$$

$$\therefore C_s = C_1 + C_2 \quad (\text{g})$$

また、 $t \rightarrow \infty$ の時、 $\frac{dC}{dt} = 0$ （定常状態）なので、(b) より、この時の濃度を C_∞ とすれば、

$$0 = -\frac{Q}{V} \cdot C_\infty + \frac{Q}{V} \cdot \left(C_0 + \frac{M}{Q} \right) \quad (\text{h})$$

$$\therefore C_\infty = C_0 + \frac{M}{Q} \quad (\text{i})$$

となる。一方、(e) 式から $t \rightarrow \infty$ の時、 $e^{-\frac{Q}{V}t} \rightarrow 0$ となるので、

$$C_\infty = C_2 \quad (\text{j})$$

となる。よって、(i) 式と (j) 式から

$$C_\infty = C_2 = C_0 + \frac{M}{Q} \quad (\text{k})$$

よって、(g) 式と (k) 式から

$$C_1 = C_s - C_2 = C_s - \left(C_0 + \frac{M}{Q} \right) \quad (\text{l})$$

となる。

したがって、(e) 式、(k) 式、(l) 式から、

$$C = \left\{ C_s - \left(C_0 + \frac{M}{Q} \right) \right\} \cdot e^{-\frac{Q}{V}t} + C_0 + \frac{M}{Q} \quad (\text{m})$$

となり、これを変形して、微分方程式 (a) 式を解いた結果、次式となる。

$$C = C_0 + (C_s - C_0) \cdot e^{-\frac{Q}{V}t} + \frac{M}{Q} \cdot \left(1 - e^{-\frac{Q}{V}t} \right) \quad (2) \text{ (再掲, 教科書 p.134 の (2.3) 式)}$$

補足 2（微分方程式を解くということについて）：

参考文献（〔〕内は、熊本県立大学附属図書館所蔵情報）

- [1] 『数学の風景が見える 微分・積分の意味がわかる』（野崎昭宏・何森仁・伊藤潤一・小沢健一，ベレ出版，2000 年 9 月，¥1,400+税，ISBN:4-939076-49-0）〔開架 2，413.3||N 98，0000295626〕
- [2] 『事例で学ぶ 工業数学の基礎』（相良紘，日刊工業新聞社，2001 年 10 月，¥2,700+税，ISBN:4-526-04821-6）〔開架 2，501.1||Sa 16，0000295627〕
- [3] 『ブルーバックス B-1003 マンガ 微積分入門』（岡部恒治，1994 年 2 月，講談社，¥980+税，ISBN:4-06-257003-3）〔書庫，408||BU 10100，0000175502〕
- [4] 『図解雑学 マンガでわかる微分・積分』（大谷隆一，ナツメ社，2003 年 1 月，¥1,000+税，ISBN:4-8163-3008-9）〔開架 2，413.3||0 84，0000295628〕
- [5] 『サイエンス・アイ新書 047 マンガでわかる微分積分』（メダカカレッジ監修，石山たいら・大上丈彦，ソフトバンク クリエイティブ，2007 年 12 月，¥952+税，ISBN:978-4-7973-4250-5）〔文庫本，080||Sa 17||47，0000316201〕

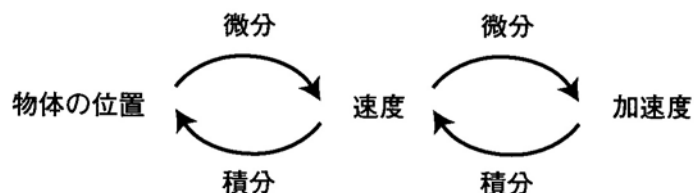


図 物体の位置と加速度の関係（出典：参考文献 [1]，p.13）

→次ページ以降も，出典は，参考文献 [1]。

01 | ボールは落ちる

ニュートンはその著作「プリンキピア」によって、それ以前のガリレイやフック等による科学的知識を集大成した、という人がいるが、これは適切なとらえ方と言えない。集大成ではなく新しい体系の創出であった。

運動について言えば、次の3つの法則を大前提にして、ガリレイやケプラー等の経験的な法則を導くことができる（31ページ参照）。

（第1法則）物体に力が働いていなければ、その物体は一直線上を同じ速さで動き続ける。

（第2法則）物体の運動に際して、その質量 m と、ある時刻における加速度 a との積は、その時刻に働いている力 f に等しい。
つまり $f = m a$

なお一般的には力と加速度はベクトルで、 $\vec{f} = m \vec{a}$ と表される。

（第3法則）作用と反作用は大きさが等しく、方向が逆である。

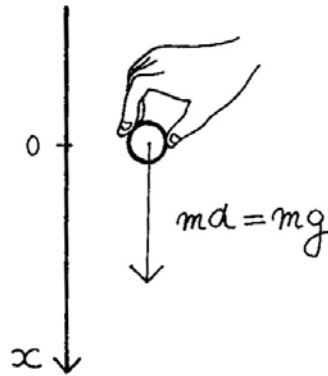
第1法則は「慣性の法則」といわれ、第3法則は「作用反作用の法則」とよばれている。第1法則は第2法則の特殊な場合で、第3法則は力そのもののあり方を述べているとみることができる。したがって、運動の法則といえば、第2法則を指すと思ってよい。

さて、地球上でボールをそっと落とす場合を考えよう。

ボールに働く重力の強さ f は、ボールの質量のみに比例すると考えてよいから、比例定数を g とすると $f=mg$ であり、第2法則から $a=g$ 、つまり

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = g \quad (*)$$

と書ける。これを、運動方程式（もっと一般的には微分方程式）といい、この式から v や x を求めることを、運動方程式（あるいは微分方程式）を解くという。



(*) を解くには、両辺を積分して

$$v = \frac{dx}{dt} = gt + v_0$$

これをさらに積分して

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

とすればよい。

ボールを離す瞬間を $t=0$ とし、そのときの高さを原点にすれば（このような条件を初期条件という）、 $v_0=0$ 、 $x_0=0$ であるから

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

となる。つまり、ガリレイの発見した式が導けてしまう。

〈補足〉 g は重力の加速度で、地表では約 $9.8 \text{ (m/sec}^2\text{)}$ である。

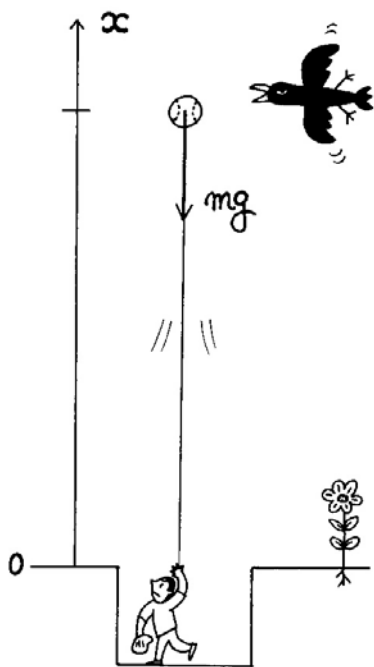
なおニュートン以前の「運動量の法則」

$$\text{質量} \times \text{速度の変化} = \text{力} \times \text{時間}$$

は、平均的・近似的にしか成り立たないので、微分・積分の考えを取り入れないと、このように「微分方程式をたてて、それを解く」という方法にはつながらない。

02 ボールを投げる

ボールを、真上に投げることを考えよう。今度は上方向をプラス、下



方向をマイナスと考える。すると、投げあげられたボールには、下向きに重力が働く。その大きさは $m \times g$ で、符号はマイナスだから、ボールに働く力 f は $f = -mg$ で表される。ニュートン力学の第2法則 $f = m \alpha$ から（あるいは g が重力のひきおこす「加速度」であることから）、次の等式が成り立つ。

$$\alpha = \frac{d^2 x}{dt^2} = -g \quad (*)$$

これを解いて x (ボールの位置) を t

(投げてからの時間) で表わしてみよう。

まず、*の両辺を t で積分すると

$$\frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

↑ 初速(一定)

もう一度積分すると

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

↑ 最初の位置

となる。投げた位置を基準にすると、 $x_0 = 0$ だから

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

となる。

松坂投手が、ボールを初速150km/時で真上に投げたとする。

$$150\text{km/時} = \frac{150000}{3600} \text{m/秒} \doteq 42\text{m/秒} \text{で、} g=9.8\text{m/秒}^2 \text{だから}$$

$$x = -4.9t^2 + 42t \text{ となる。}$$

(1) 何秒後に落ちてくるだろう？

$$x=0 \text{ になる、} t \text{ を求める } -4.9t^2 + 42t = 0 \text{ より}$$

$$t(4.9t - 42) = 0 \text{ より } t = \frac{42}{4.9} \doteq 8.6$$

8.6秒後となる。

(2) 最高点は何メートルの高さだろう？

上りと、下りの時間は同じだから $t = \frac{8.6}{2} = 4.3$ のときが最高点、
よって $-4.9 \times (4.3)^2 + 42 \times 4.3 = 89.999 \doteq 90$ メートル

なんと、90メートルまでいくのだ。もっとも空気抵抗なしとして。

〈補足〉ガリレイの法則だけでなく、ケプラーの法則もニュートン力学の3法則（と万有引力の法則）から導かれる——と言っても、「すでに知られている法則を導いただけじゃないか」と思う人たちもいる。しかしガリレイもケプラーも、過去の観測から、経験的に彼らの法則を導き出した。だから新しい問題についてきかれると、「では実験してみましょう」というほかない。ボールを投げあげるくらいなら何百回かやってみるのも悪くない。しかしロケットの打ち上げなどでは、そう何回もやってみるわけにはいかない。ニュートンの方法なら、ボールを1回も投げあげずに、理論的に上の結果を導くことができる。これが理論の強みである！