環境設備原論（第12回目）［木曜日・14:30ー16:00・小講義室２］

2005.01.13

環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

補足１（配付資料p.79の微分方程式を解く過程について）:

微分方程式

変数xとその関数$y = y(x)$および導関数$y'\left(= \dfrac{dy}{dx}\right)$を含む方程式を微分方程式という。

微分方程式を満たすxの関数yをその方程式の解といい，解$y(x)$を求めることを「微分方程式を解く」という。

参考文献（〔〕内は，熊本県立大学附属図書館所蔵情報）

・『基礎　微分積分』（市東和夫・中田広光・八幡誠，産業図書，1999年４月，￥2,520，ISBN：4-7828-9032-X）〔開架２，413.3||Sh 92，0000231511〕→（犬塚裕樹先生担当の数学Ｉ（１年生前期配当）と数学II（１年生後期配当の教科書）

配布資料79ページの（１）式から

$$C_0 \cdot Q \cdot dt + M \cdot dt - C \cdot Q \cdot dt = V \cdot dC$$ （１）（再掲，教科書p.134の（2.1）式）

を変形すれば，次式となる。

$$\frac{V}{Q} \cdot \frac{dC}{dt} = C_0 - C + \frac{M}{Q}$$ （ａ）（教科書p.134の（2.2）式）

この式を変形して

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{Q}{V} \cdot C + \frac{Q}{V} \cdot \left(C_0 + \frac{M}{Q}\right)$$ （ｂ）

ここで，微分方程式の教科書などより

$$\frac{dC}{dt} = a \cdot C + b \quad (a,\ b\text{は定数})$$ （ｃ）

の時，この微分方程式を解くと，

$$C = C_1 \cdot e^{at} + C_2 \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$ （ｄ）

であるので，（ｂ）式を解くと，次式のようになる。

$$C = C_1 \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} + C_2 \quad (C_1,\ C_2\text{は定数})$$ （ｅ）

初期条件は，$t = 0$の時，$C = C_S$であったので，（ｅ）式から

$$C_S = C_1 \cdot e^0 + C_2$$ （ｆ）

$$\therefore \quad C_S = C_1 + C_2 \tag{g}$$

また，$t \to \infty$の時，$\dfrac{dC}{dt} = 0$（定常状態）なので，（ｂ）より，この時の濃度をC_∞とすれば，

$$0 = -\frac{Q}{V} \cdot C_\infty + \frac{Q}{V} \cdot \left(C_0 + \frac{M}{Q} \right) \tag{h}$$

$$\therefore \quad C_\infty = C_0 + \frac{M}{Q} \tag{i}$$

となる。一方，（ｅ）式から$t \to \infty$の時，$e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} \to 0$となるので，

$$C_\infty = C_2 \tag{j}$$

となる。よって，（ｉ）式と（ｊ）式から

$$C_\infty = C_2 = C_0 + \frac{M}{Q} \tag{k}$$

よって，（ｇ）式と（ｋ）式から

$$C_1 = C_S - C_2 = C_S - \left(C_0 - \frac{M}{Q} \right) \tag{l}$$

となる。

したがって，（ｅ）式，（ｋ）式，（ｌ）式から，

$$C = \left\{ C_S - \left(C_0 - \frac{M}{Q} \right) \right\} \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} + C_0 + \frac{M}{Q} \tag{m}$$

となり，これを変形して，微分方程式（ａ）式を解いた結果，次式となる。

$$C = C_0 + (C_S - C_0) \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} + \frac{M}{Q} \cdot \left(1 - e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} \right)$$ （２）（再掲，教科書 p.134 の（2.3）式）

補足２（微分方程式を解くということについて）：

参考文献（〔〕内は，熊本県立大学附属図書館所蔵情報）

［１］『数学の風景が見える　微分・積分の意味がわかる』（野崎昭宏・何森仁・伊藤潤一・小沢健一，ベレ出版，￥1,400＋税，ISBN：4-939076-49-0）〔所蔵なし〕
［２］『事例で学ぶ　工業数学の基礎』（相良紘，日刊工業新聞社，￥2,700＋税，ISBN：4-526-04821-6）〔所蔵なし〕
［３］『ブルーバックス　B-1003　マンガ　微積分入門』（岡部恒治，1994年２月，講談社，￥980＋税，ISBN：4-06-257003-3）〔書庫，408||BU 10100，0000175502〕
［４］『図解　微分・積分が見る見るわかる』（岡部恒治，2002年２月，サンマーク出版，￥1,600＋税，ISBN：4-7631-9426-7）〔所蔵なし〕
［５］『図解雑学　マンガでわかる微分・積分』（大谷隆一，ナツメ社，2003年１月，￥1,000＋税，ISBN：4-8163-3008-9）〔所蔵なし〕

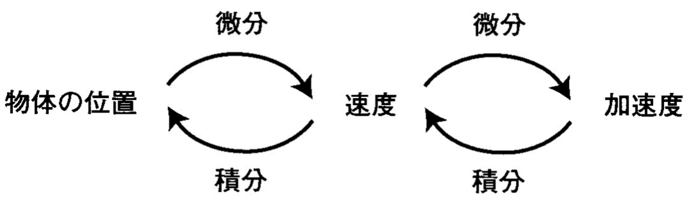


図　物体の位置と加速度の関係（出典：参考文献［１］，p.13）

→次ページ以降も，出典は，参考文献［１］。

環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

01 ボールは落ちる

ニュートンはその著作「プリンキピア」によって、それ以前のガリレイやフック等による科学的知識を集大成した、という人がいるが、これは適切なとらえ方と言えない。集大成ではなく新しい体系の創出であった。

運動について言えば、次の3つの法則を大前提にして、ガリレイやケプラー等の経験的な法則を導くことができる（31ページ参照）。

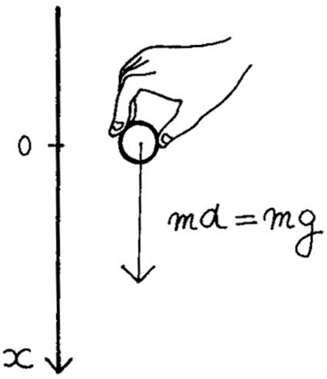
（第1法則）物体に力が働いていなければ、その物体は一直線上を同じ速さで動き続ける。

（第2法則）物体の運動に際して、その質量 m と、ある時刻における加速度 α との積は、その時刻に働いている力 f に等しい。
つまり　$f = m\alpha$
なお一般的には力と加速度はベクトルで、$\vec{f} = m\vec{\alpha}$ と表される。

（第3法則）作用と反作用は大きさが等しく、方向が逆である。

第1法則は「慣性の法則」といわれ、第3法則は「作用反作用の法則」とよばれている。第1法則は第2法則の特殊な場合で、第3法則は力そのもののあり方を述べているとみることができる。したがって、運動の法則といえば、第2法則を指すと思ってよい。

さて、地球上でボールをそっと落とす場合を考えよう。



ボールに働く重力の強さ f は、ボールの質量のみに比例すると考えてよいから、比例定数を g とすると $f=mg$ であり、第2法則から $\alpha=g$、つまり

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = g \qquad (*)$$

と書ける。これを、運動方程式（もっと一般的には微分方程式）といい、この式から v や x を求めることを、運動方程式（あるいは微分方程式）を解くという。

（＊）を解くには、両辺を積分して

$$v = \frac{dx}{dt} = gt + v_0$$

これをさらに積分して

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

とすればよい。

ボールを離す瞬間を $t=0$ とし、そのときの高さを原点にすれば（このような条件を初期条件という）、$v_0=0,\ x_0=0$ であるから

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

となる。つまり、ガリレイの発見した式が導けてしまう。

〈補足〉 g は重力の加速度で、地表では約9.8（m/sec^2）である。

なおニュートン以前の「運動量の法則」

質量×速度の変化＝力×時間

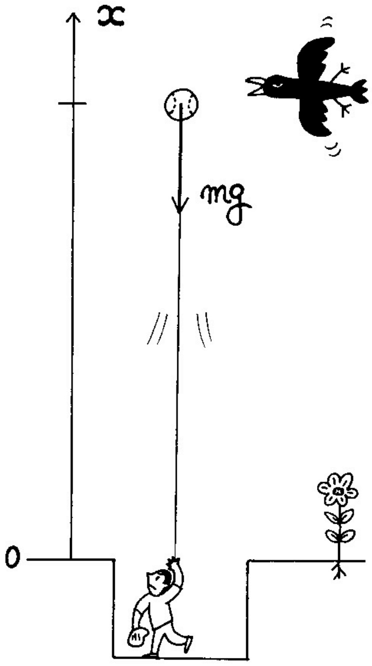
は、平均的・近似的にしか成り立たないので、微分・積分の考えを取り入れないと、このように「微分方程式をたてて、それを解く」という方法にはつながらない。

159

環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

02 ボールを投げる

ボールを、真上に投げることを考えよう。今度は上方向をプラス、下方向をマイナスと考える。すると、投げあげられたボールには、下向きに重力が働く。その大きさは $m \times g$ で、符号はマイナスだから、ボールに働く力 f は $f = -mg$ で表される。ニュートン力学の第2法則 $f = m\alpha$ から（あるいは g が重力のひきおこす「加速度」であることから）、次の等式が成り立つ。



$$\alpha = \frac{d^2x}{dt^2} = -g \qquad (※)$$

これを解いて x（ボールの位置）を t（投げてからの時間）で表わしてみよう。

まず、※の両辺を t で積分すると

$$\frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

v_0 ── 初速（一定）

もう一度積分すると

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

x_0 ── 最初の位置

となる。投げた位置を基準にすると、$x_0 = 0$ だから

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

となる。

160

松坂投手が、ボールを初速150km/時で真上に投げたとする。

$150\mathrm{km}/時＝\dfrac{150000}{3600}\mathrm{m}/秒≒42\mathrm{m}/秒$で、$g＝9.8\mathrm{m}/秒^2$だから

$x＝-4.9t^2+42t$　となる。

(1) 何秒後に落ちてくるだろう？

$x＝0$ になる、t を求める $-4.9t^2+42t＝0$ より

$t(4.9t-42)＝0$より　$t＝\dfrac{42}{4.9}≒8.6$

8.6秒後となる。

(2) 最高点は何メートルの高さだろう？

上りと、下りの時間は同じだから　$t＝\dfrac{8.6}{2}＝4.3$のときが最高点、よって $-4.9×(4.3)^2+42×4.3＝89.999≒90$メートル

なんと、90メートルまでいくのだ。もっとも空気抵抗なしとして。

〈補足〉ガリレイの法則だけでなく、ケプラーの法則もニュートン力学の3法則（と万有引力の法則）から導かれる――と言っても、「すでに知られている法則を導いただけじゃないか」と思う人たちもいる。しかしガリレイもケプラーも、過去の観測から、経験的に彼らの法則を導き出した。だから新しい問題についてきかれると、「では実験してみましょう」というほかない。ボールを投げあげるくらいなら何百回かやってみるのも悪くない。しかしロケットの打ち上げなどでは、そう何回もやってみるわけにはいかない。ニュートンの方法なら、ボールを1回も投げあげずに、理論的に上の結果を導くことができる。これが理論の強みである！

161