環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

補足：

微分方程式

変数xとその関数$y=y(x)$および導関数$y'=\dfrac{dy}{dx}$を含む方程式を微分方程式という。

微分方程式を満たすxの関数yをその方程式の解といい，解$y(x)$を求めることを「微分方程式を解く」という。

参考文献（〔〕内は，熊本県立大学附属図書館所蔵情報）

・『基礎　微分積分』（市東和夫・中田広光・八幡誠，産業図書，1999 年４月，￥2,520，ISBN：4-7828-9032-X）〔開架２，413.3¦¦Sh　92，000231511〕→（犬塚裕樹先生担当の数学 I（１・２年生前期配当）と数学 II（１・２年生後期配当の教科書）

配布資料 p.54 の（１）式から

$$C_0 \cdot Q \cdot dt + M \cdot dt - C \cdot Q \cdot dt = V \cdot dC \qquad (1)$$
（再掲，教科書 p.134 の（2.1）式）

を変形すれば，次式となる。

$$\frac{V}{Q} \cdot \frac{dC}{dt} = C_0 - C + \frac{M}{Q} \qquad (a)$$
（教科書 p.134 の（2.2）式）

この式を変形して

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{Q}{V} \cdot C + \frac{Q}{V} \cdot \left(C_0 + \frac{M}{Q} \right) \qquad (b)$$

ここで，微分方程式の教科書などより

$$\frac{dC}{dt} = a \cdot C + b \quad (a,\ b\text{は定数}) \qquad (c)$$

の時，この微分方程式を解くと，

$$C = C_1 \cdot e^{at} + C_2 \quad (C_1,\ C_2\text{は定数}) \qquad (d)$$

であるので，（ｂ）式を解くと，次式のようになる。

$$C = C_1 \cdot e^{-\frac{Q}{V} t} + C_2 \quad (C_1,\ C_2\text{は定数}) \qquad (e)$$

初期条件は，$t=0$の時，$C=C_S$であったので，（ｅ）式から

$$C_S = C_1 \cdot e^0 + C_2 \qquad (f)$$

$$\therefore \quad C_S = C_1 + C_2 \qquad (g)$$

2003.11.27
環境共生学部・居住環境学専攻
助教授・辻原万規彦

また，$t \to \infty$ の時，$\dfrac{dC}{dt} = 0$（定常状態）なので，（ｂ）より，この時の濃度を C_∞ とすれば，

$$0 = -\frac{Q}{V} C_\infty + \frac{Q}{V}\left(C_0 + \frac{M}{Q}\right) \qquad (\mathrm{h})$$

$$\therefore \quad C_\infty = C_0 + \frac{M}{Q} \qquad (\mathrm{i})$$

となる。一方，（ｅ）式から $t \to \infty$ の時，$e^{-\frac{Q}{V}t} \to 0$ となるので，

$$C_\infty = C_2 \qquad (\mathrm{j})$$

となる。よって，（ｉ）式と（ｊ）式から

$$C_\infty = C_2 = C_0 + \frac{M}{Q} \qquad (\mathrm{k})$$

よって，（ｇ）式と（ｋ）式から

$$C_1 = C_S - C_2 = C_S - \left(C_0 - \frac{M}{Q}\right) \qquad (\mathrm{l})$$

となる。

したがって，（ｅ）式，（ｋ）式，（ｌ）式から，

$$C = \left\{C_S - \left(C_0 - \frac{M}{Q}\right)\right\} e^{-\frac{Q}{V}t} + C_0 + \frac{M}{Q} \qquad (\mathrm{m})$$

となり，これを変形して，微分方程式（ａ）式を解いた結果，次式となる。

$$C = C_0 + \left(C_S - C_0\right) e^{-\frac{Q}{V}t} + \frac{M}{Q}\left(1 - e^{-\frac{Q}{V}t}\right)$$ （２）（再掲，教科書 p.134 の（2.3）式）